

**AGH**AGH UNIVERSITY OF SCIENCE
AND TECHNOLOGY

Module name: Mathematical Foundations of Quantum Mechanics

Academic year: 2019/2020 Code: ZSDA-3-0239-s ECTS credits: 5

Faculty of: Szkoła Doktorska AGH

Field of study: Szkoła Doktorska AGH Specialty: —

Study level: Third-cycle studies Form and type of study: Full-time studies

Lecture language: English Profile of education: Academic (A) Semester: 0

Course homepage: —

Responsible teacher: dr hab. Kuźel Sergiusz (kuzhel@agh.edu.pl)

Module summary

Studenci zdobywają wiedzę o matematycznych podstawach zaawansowanej mechaniki kwantowej.

Description of learning outcomes for module

MLO code	Student after module completion has the knowledge/ knows how to/is able to	Connections with FLO	Method of learning outcomes verification (form of completion)
Skills: he can			
M_U001	Zna zasady metody kwantowania oraz potrafi obliczyć widmo szczególnych Hamiltonianów	SDA3A_U01, SDA3A_U04	Examination, Activity during classes
M_U002	Rozumie w jaki sposób teoria operatorów samo sprzężonych może być zastosowana w badaniach mechaniki kwantowej	SDA3A_U02, SDA3A_U01	Examination, Activity during classes
Knowledge: he knows and understands			
M_W001	Zna podstawowe pojęcia i twierdzenia teorii operatorów samosprzężonych, teorii prawdopodobieństwa.	SDA3A_W02, SDA3A_W01	Examination, Activity during classes
M_W002	Posiada pogłębioną wiedzę na temat teorii spektralnej oraz potrafi omówić konkretne przykłady Hamiltonianów mechaniki kwantowej	SDA3A_W03, SDA3A_W01	Examination, Activity during classes
M_W003	Rozumie znaczenie postulatów mechaniki kwantowej	SDA3A_W03, SDA3A_W02, SDA3A_W05	Examination, Activity during classes

Number of hours for each form of classes

Suma	Form of classes										
	Lectures	Auditorium classes	Laboratory classes	Project classes	Conversation seminar	Seminar classes	Practical classes	Fieldwork classes	Workshops	Prace kontrolne i przejściowe	Lektorat
60	30	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0

FLO matrix in relation to forms of classes

MLO code	Student after module completion has the knowledge/ knows how to/is able to	Form of classes										
		Lectures	Auditorium classes	Laboratory classes	Project classes	Conversation seminar	Seminar classes	Practical classes	Fieldwork classes	Workshops	Prace kontrolne i przejściowe	Lektorat
Skills: he can												
M_U001	Zna zasady metody kwantowania oraz potrafi obliczyć widmo szczególnych Hamiltonianów	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M_U002	Rozumie w jaki sposób teoria operatorów samo sprzężonych może być zastosowana w badaniach mechaniki kwantowej	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Knowledge: he knows and understands												
M_W001	Zna podstawowe pojęcia i twierdzenia teorii operatorów samosprzężonych, teorii prawdopodobieństwa.	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M_W002	Posiada pogłębioną wiedzę na temat teorii spektralnej oraz potrafi omówić konkretne przykłady Hamiltonianów mechaniki kwantowej	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M_W003	Rozumie znaczenie postulatów mechaniki kwantowej	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Student workload (ECTS credits balance)

Student activity form	Student workload
Udział w zajęciach dydaktycznych/praktyka	60 h
Preparation for classes	28 h
przygotowanie projektu, prezentacji, pracy pisemnej, sprawozdania	4 h
Realization of independently performed tasks	28 h
Examination or Final test	2 h
Contact hours	4 h
Summary student workload	126 h
Module ECTS credits	5 ECTS

Additional information**Module content****Lectures**

PL

1. Wstępne pojęcia matematyczne. Operatory domknięte i domykalne w przestrzeni Hilberta. Różnica między operatorami ograniczonymi a nieograniczonymi. Pojęcia operatora sprzężonego. Operatory symetryczne i samosprężone. Części widma oraz ich sens fizyczny. Specjalne klasy operatorów samosprężonych. Widmo operatora mnożenia. Funkcja spektralna operatora samosprężonego. Opis widma za pomocą funkcji spektralnej. Relacje komutacyjne. Funkcje operatorów samosprężonych. Przykłady zastosowania rachunku funkcyjnego dla operatorów samosprężonych. Grupy operatorów unitarnych. Twierdzenie Stone'a.

2. Podstawy formalizmu mechaniki kwantowej. Sformułowanie głównych postulatów mechaniki kwantowej. Stany i obserwabli. Związek pomiędzy obserwabliami a operatorami samosprężonymi. Rola widma w pomiarze obserwabli. Sens fizyczny wartości własnych. Koncepcja jednocześnie wymiernych obserwabli. Uniwersalny dualizm korpuskularno-falowy. Operator energii (Hamiltonian). Równanie Schrödingera. Reprezentacje Schrodingera i Heisenberga mechaniki kwantowej.

3. Różniczkowanie obserwabli względem czasu. Metody kwantyzacji. Relacje komutacyjne Heisenberga. Sprężone obserwabli. Relacja nieoznaczoności. Relacja nieoznaczoności położenie-pęd.

4. Oscylator harmoniczny. Operatory anihilacji i kreacji. Swobodna cząstka w przestrzeni 3D. Spin cząstki. Fermiony i bozony. Identyczne cząstki.

5. Radialne równanie Schrödingera. Rozpraszania teoria. Rozpraszanie cząstek. Rozpraszanie cząstek na potencjale. Teoria rozpraszania Laxa-Philipsa.

6. Superpozycja kwantowa. Paradoks kota Schrödingera. Idea kryptografii kwantowej.

7. Twierdzenie Naimarka o dylatacji i jego zastosowanie w teorii POVM.

8. Koncepcja PT-symetrycznej mechaniki kwantowej. Obserwable jak operatory samosprężone w przestrzeni Kreina. Koncepcja nieokreślonej metryki. C-symetria i niezłamana PT-symetria. Osobliwości spektralne, wyjątkowe punkty i zastosowanie w optyce.

EN

1. Mathematical preliminaries. Closed and closable operators in a Hilbert space. The difference between bounded and unbounded operators. The concept of adjoint operator. Symmetric and self-adjoint operators. The parts of the spectrum and their physical meaning. Special classes of self-adjoint operators. The spectrum of the multiplication operator. Spectral function of a self-adjoint operator. Description of spectrum in terms of spectral function. Commutation relations. Functions of a self-adjoint operators. Examples of application of functional calculus for self-adjoint operators. One-parameter groups of unitary operators. Stone theorem.

2. General concepts of Quantum mechanics. Formulation of basic postulates of QM. States and observables in QM. Relationship between observables and self-adjoint operators. The role of spectrum in the measurement of observables. Physical meaning of eigenvalues. The concept of simultaneously measurable observables. Universal wave-particle duality. The energy operator (Hamiltonian) Schrodinger equation. Schrodinger and Heisenberg pictures of QM.

3. Time differentiation of observables. Quantization methods. Heisenberg commutation relations. Canonically conjugate observables. Uncertainty relations. Heisenberg uncertainty relations.

4. Harmonic oscillator. Annihilation and creation operators The free particle in 3D-space. Particles with spin. Fermions and bosons. Identical particles.

5. The radial Schrodinger equation. Scattering theory. Scattering of a one-dimensional particle by a potential barrier. Scattering by a potential center. The Lax-Phillips scattering.

6. Quantum superposition. The Schrodinger's cat paradox. The idea of quantum cryptography.

7. Naimark dilation theorem and its application in Positive Operator Valued Measures theory (POVM's)

8. The concept of PT-symmetric Quantum Mechanics. Observables as self-adjoint operators in Krein space. The concept of the indefinite metric. C-symmetry and unbroken PT-symmetry. Spectral singularities, exceptional points and application in optics.

Auditorium classes

Zajęcia ćwiczeniowe

Ilustracja tematów prezentowanych podczas wykładów. Dyskusja i rozwiązanie różnych przykładów i konkretnych problemów.

Auditorium classes

Illustration of topics presented during lectures. Discussion and solution of various examples and particular problems.

Teaching methods and techniques:

Lectures: Treści prezentowane na wykładzie są przekazywane w formie klasycznego wykładu tablicowego

Auditorium classes: Podczas zajęć audytoryjnych studenci na tablicy rozwiązują zadane wcześniej problemy.

Warunki i sposób zaliczenia poszczególnych form zajęć, w tym zasady zaliczeń poprawkowych, a także warunki dopuszczenia do egzaminu:

Warunkiem zaliczenia przedmiotu jest aktywność na zajęciach, dopuszczalne są trzy nieobecności (na wykładach / ćwiczeniach).

Zasady udziału w poszczególnych zajęciach, ze wskazaniem, czy obecność studenta na zajęciach jest obowiązkowa:

Lectures:

- Attendance is mandatory: Yes
- Participation rules in classes: Nie określono

Auditorium classes:

- Attendance is mandatory: Yes
- Participation rules in classes: Nie określono

Method of calculating the final grade

Ocena końcowa zależy przede wszystkim od oceny egzaminu i aktywności na zajęciach, zarówno na wykładach jak i ćwiczeniach,

Sposób i tryb wyrównywania zaległości powstałych wskutek nieobecności studenta na zajęciach:

Zapoznanie się z materiałem dotyczącym tematu omawianego na zajęciach, na których student był nieobecny.

Prerequisites and additional requirements

Podstawowa wiedza z zakresu analizy funkcjonalnej i teorii prawdopodobieństwa

Recommended literature and teaching resources

1. Leon A. Takhtajan, Quantum Mechanics for Mathematicians, Graduate Studies in Mathematics, v. 95, AMS, 2008.

2. L.D. Faddeev and O.A. Yakubovskii, Lectures on Quantum Mechanics for Mathematics Students, Student Math. Library, v. 47, AMS, 2000.

3. F.A. Berezin and M.A. Shubin, Schrödinger Equation, Kluwer, 1991.

4. John von Neumann, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Princeton Landmarks in Mathematics and Physics, Princeton University Press, 1996.

Scientific publications of module course instructors related to the topic of the module

1. Carl M. Bender, Patric E. Dorey, Clare Dunning, Andreas Fring, Daniel W. Hook, Hugh F. Jones, Sergii

Kuzhel, Géza Lévai, Roberto Tateo, PT-Symmetry : In Quantum and Classical Physics — London : World Scientific Publishing Europe Ltd., cop. 2019. — XXII, 446 s.

2. S. Albeverio and S. Kuzhel, PT-Symmetric Operators in Quantum Mechanics: Krein Spaces Methods, in 'Non-Selfadjoint Operators in Quantum Physics: Mathematical Aspects', Fabio Bagarello, Jean-Pierre Gazeau, Franciszek H. Szafraniec, and Miloslav Znojil, editors, 2015 John Wiley Sons, Inc.

3. Sergii Kuzhel, Miloslav Znojil, Non-self-adjoint Schrödinger operators with nonlocal one-point interactions // Banach Journal of Mathematical Analysis ; 2017 vol. 11 no. 4, s. 923-944.

4. P.A. Cojuhari, A. Grod, S. Kuzhel, On the S-matrix of Schrödinger operators with non-symmetric zero-range potentials // Journal of Physics. A; 2014 vol. 47 iss. 31,

5. Carl M. Bender, Sergii Kuzhel, Unbounded C-symmetries and their nonuniqueness // Journal of Physics. A; 2012 vol. 45 no. 44 spec. iss., s

6. U. Gunther, S. Kuzhel, PT-symmetry, Cartan decompositions, Lie triple systems and Krein space-related Clifford algebras // J. Phys. A 43 (2010), № 39, 392002,

7. S. Albeverio and S. Kuzhel, Pseudo-Hermiticity and theory of singular perturbations // Lett. Math. Phys., 67 (2004), no. 3, 223—238.

Additional information

Brak