



Module name: Monte Carlo methods and stochastic simulations - theoretical and implementation aspects

Academic year: 2019/2020 Code: ZSDA-3-0248-s ECTS credits: 4

Faculty of: Szkoła Doktorska AGH

Field of study: Szkoła Doktorska AGH Specialty: —

Study level: Third-cycle studies Form and type of study: Full-time studies

Lecture language: English Profile of education: Academic (A) Semester: 0

Course homepage: —

Responsible teacher: dr hab. Przybyłowicz Paweł (przybyl@agh.edu.pl)

## Module summary

In recent years dynamical systems, describing many models in mathematics, physics and finances, become more and more complex. Numerical analysis narrowed only to deterministic algorithms seems to be insufficient for such systems. Therefore, we can observe increasing popularity of Monte Carlo algorithms. We present main ideas of Monte Carlo methods, its theoretical properties and their application to option pricing.

## Description of learning outcomes for module

MLO code	Student after module completion has the knowledge/ knows how to/is able to	Connections with FLO	Method of learning outcomes verification (form of completion)
Social competence: is able to			
M_K001	potrafi pracować zespołowo; rozumie konieczność systematycznej pracy nad wszelkimi projektami, które mają długofalowy charakter	SDA3A_K01, SDA3A_K03, SDA3A_K02	Project, Activity during classes
M_K002	rozumie i docenia znaczenie uczciwości intelektualnej w działaniach własnych i innych osób; postępuje etycznie	SDA3A_K03, SDA3A_K02	Project, Activity during classes
M_K003	potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, także w języku obcym	SDA3A_K02	Project, Activity during classes
Skills: he can			
M_U001	rozumie matematyczne podstawy analizy algorytmów, procesów obliczeniowych oraz związanych z nimi problemów	SDA3A_U02, SDA3A_U01, SDA3A_U04	Project, Activity during classes

M_U002	zna podstawowe rozkłady probabilistyczne i ich własności; potrafi je stosować w zagadnieniach praktycznych, potrafi stosować metody Monte Carlo oraz procesy stochastyczne jako narzędzie do modelowania zjawisk i analizy ich ewolucji	SDA3A_U07, SDA3A_U06, SDA3A_U01	Project, Activity during classes
M_U003	potrafi implementować znane algorytmu lub też konstruować nowe o porządkanych własnościach numerycznych, służące do rozwiązywania typowych i nietypowych problemów matematycznych	SDA3A_U07, SDA3A_U06, SDA3A_U04, SDA3A_U03	Project, Activity during classes
Knowledge: he knows and understands			
M_W001	zna zaawansowane techniki obliczeniowe, wspomagające pracę matematyka i rozumie ich ograniczenia, zna podstawy modelowania stochastycznego w matematyce finansowej i aktuarialnej lub w naukach przyrodniczych, w szczególności fizyce, chemii lub biologii	SDA3A_W02	Activity during classes, Project
M_W002	zna metody numeryczne stosowane do znajdowania przybliżonych rozwiązań zagadnień matematycznych (na przykład równań różniczkowych) stawianych przez dziedziny stosowane (np. technologie przemysłowe, zarządzanie itp.)	SDA3A_W03, SDA3A_W01	Project, Activity during classes

## Number of hours for each form of classes

Suma	Form of classes										
	Lectures	Auditorium classes	Laboratory classes	Project classes	Conversation seminar	Seminar classes	Practical classes	Fieldwork classes	Workshops	Prace kontrolne i przejściowe	Lektorat
30	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

## FLO matrix in relation to forms of classes

MLO code	Student after module completion has the knowledge/ knows how to/is able to	Form of classes										
		Lectures	Auditorium classes	Laboratory classes	Project classes	Conversation seminar	Seminar classes	Practical classes	Fieldwork classes	Workshops	Prace kontrolne i przejściowe	Lektorat
Social competence: is able to												
M_K001	potrafi pracować zespołowo; rozumie konieczność systematycznej pracy nad wszelkimi projektami, które mają długofalowy charakter	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

M_K002	rozumie i docenia znaczenie uczciwości intelektualnej w działaniach własnych i innych osób; postępuje etycznie	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M_K003	potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, także w języku obcym	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Skills: he can												
M_U001	rozumie matematyczne podstawy analizy algorytmów, procesów obliczeniowych oraz związanych z nimi problemów	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M_U002	zna podstawowe rozkłady probabilistyczne i ich własności; potrafi je stosować w zagadnieniach praktycznych, potrafi stosować metody Monte Carlo oraz procesy stochastyczne jako narzędzie do modelowania zjawisk i analizy ich ewolucji	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M_U003	potrafi implementować znane algorytmu lub też konstruować nowe o porządkanych własnościach numerycznych, służące do rozwiązywania typowych i nietypowych problemów matematycznych	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Knowledge: he knows and understands												
M_W001	zna zaawansowane techniki obliczeniowe, wspomagające pracę matematyka i rozumie ich ograniczenia, zna podstawy modelowania stochastycznego w matematyce finansowej i aktuarialnej lub w naukach przyrodniczych, w szczególności fizyce, chemii lub biologii	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M_W002	zna metody numeryczne stosowane do znajdowania przybliżonych rozwiązań zagadnień matematycznych (na przykład równań różniczkowych) stawianych przez dziedziny stosowane (np. technologie przemysłowe, zarządzanie itp.)	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

**Student workload (ECTS credits balance)**

Student activity form	Student workload
Udział w zajęciach dydaktycznych/praktyka	30 h
Preparation for classes	15 h
przygotowanie projektu, prezentacji, pracy pisemnej, sprawozdania	30 h
Summary student workload	75 h
Module ECTS credits	4 ECTS

**Additional information****Module content****Lectures**

1. Basic definitions and theorems from probability. Main ideas of Monte Carlo methods and stochastic simulation. Empirical variance and confidence intervals.

2. Introduction to programming in Python language. Random numbers generation in Python.

3. Monte Carlo methods for integration, curse of dimensionality for deterministic quadratures.

4. Randomized algorithms (Euler and Runge-Kutta) for approximation of solution of deterministic ordinary differential equations.

5. Basic definitions and theorems from theory of stochastic processes, definitions of Wiener, homogeneous Poisson processes, compound Poisson process. Brownian bridge construction.

6. Basic properties of stochastic integral driven by Wiener and Poisson processes. Ito formula and definition of solution of stochastic differential equation in the jump-diffusion case (SDE).

7. Main properties of solutions of SDEs in the Gaussian case and jump-diffusion case (existence and uniqueness of strong solution, mean square regularity and boundedness of solution).

8. Euler and Milstein algorithms for strong approximation of solutions of SDEs. Their mean square error. Purely Gaussian and jump-diffusion cases.

9. General information about Ito-Taylor schemes of higher order (Wagner-Platen scheme, multiple Ito integrals, problems with implementation).

10. Randomized methods for strong approximation of solutions of SDEs.

11. Issues of optimality in the context of Information-Based Complexity.

12. Monte Carlo methods for weak approximation of SDEs, Feynman–Kac formula. Application to option pricing (Black-Scholes model, Merton and Kou jump-diffusion models).

We will also present exemplary implementation of chosen algorithms in Python programming language.

In addition, students will work on a larger individual project that combines theoretical knowledge, gained during lectures, with programming skills.

### **Teaching methods and techniques:**

Lectures: Lectures and exemplary implementation of algorithms in Python programming language.

### **Warunki i sposób zaliczenia poszczególnych form zajęć, w tym zasady zaliczeń poprawkowych, a także warunki dopuszczenia do egzaminu:**

The final grade is equal to the grade obtained for the individual project.

### **Zasady udziału w poszczególnych zajęciach, ze wskazaniem, czy obecność studenta na zajęciach jest obowiązkowa:**

Lectures:

- Attendance is mandatory: Yes
- Participation rules in classes: Presence is obligatory, 2 unjustified absences allowed.

### **Method of calculating the final grade**

The final grade is equal to the grade obtained for the individual project.

### **Sposób i tryb wyrównywania zaległości powstałych wskutek nieobecności studenta na zajęciach:**

In the case of absence the students are obligated to prepare the material for the next classes on their own.

### **Prerequisites and additional requirements**

Basic knowledge of ordinary differential equations, numerical analysis and probability theory.

### **Recommended literature and teaching resources**

1. Kloeden, P.E., Platen, E., Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
2. Janicki, A., Izydorczyk, A., Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym. in Polish, WNT Warszawa, 2001.
3. Kloeden, P.E., Platen, E., Schurz, H., Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.
4. Karatzas, I., Shreve, S.E. Brownian Motion and Stochastic Calculus. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 1998.
5. S. Asmussen, P. W. Glynn, Stochastic Simulation – Algorithms and Analysis, Springer Science, 2007.
6. P. Glasserman, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer Science, 2004.
7. J.F. Traub, G.W. Wasilkowski, H. Woźniakowski, Information—Based Complexity, Academic Press, New York, 1988.

### **Scientific publications of module course instructors related to the topic of the module**

1. Przybyłowicz P. (2009), „Linear Information for Approximation of the Itô Integrals”, Numerical Algorithms 52, 677-699,

2. Przybyłowicz P. (2010), „Adaptive Itô-Taylor algorithm can optimally approximate the Itô integrals of singular functions” , Journal of Computational and Applied Mathematics 235, 203-217,
3. Przybyłowicz P. (2013), „Optimal sampling design for approximation of stochastic Itô integrals with application to the nonlinear Lebesgue integration”, Journal of Computational and Applied Mathematics 245, 10-29,
4. Przybyłowicz P. (2014), „Optimality of Euler-type algorithms for approximation of stochastic -differential equations with discontinuous coefficients”, International Journal of Computer Mathematics 91, 1461-1479
5. Przybyłowicz P., Morkisz P. (2014), „Strong approximation of solutions of stochastic differential equations with the time-irregular coefficients via randomized Euler algorithm”, Applied Numerical Mathematics 78, 80-94,
6. Przybyłowicz P. (2015), „Minimal asymptotic error for one-point approximation of SDEs with time-irregular coefficients”, Journal of Computational and Applied Mathematics 282, 98-110
7. Przybyłowicz P. (2015), „Global approximation with minimal asymptotic error of SDEs with time-irregular coefficients ” , Applied Mathematics and Computation 270, 441-457
8. Przybyłowicz P. (2016), „Optimal global approximation of stochastic differential equations with additive Poisson noise”, Numerical Algorithms 73, 323-348
9. Dębowski J., Przybyłowicz P. (2016), „Optimal approximation of stochastic integrals with respect to a homogeneous Poisson process”, Mediterranean Journal of Mathematics 13, 3713-3727
10. Morkisz P. M., Przybyłowicz P. (2017), „Optimal pointwise approximation of SDE's from inexact information”, Journal of Computational and Applied Mathematics 324, 85-100
11. Kałuża A., Przybyłowicz P. (2018), „Optimal global approximation of jump-diffusion SDEs via path-independent step-size control”, Applied Numerical Mathematics 128, 24-42
12. Przybyłowicz P. (2019), „Optimal sampling design for global approximation of jump diffusion stochastic differential equations”, Stochastics 91, 235-264
13. Przybyłowicz P. (2019), “Efficient approximate solution of jump-diffusion SDEs via path-dependent adaptive step-size control”, Journal of Computational and Applied Mathematics 350, 396-411
14. Kałuża A., Morkisz P. M., Przybyłowicz P. (2019), „Optimal approximation of stochastic integrals in analytic noise model”, Applied Mathematics and Computation 356, 74-91

### **Additional information**

None