AGH UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Module name:	Functional analysis and operator theory
Academic year:	2019/2020
Code:	ZSDA-3-0270-s
ECTS credits:	6
Faculty of:	Szkoła Doktorska AGH
Field of study:	Szkoła Doktorska AGH
Specialty:	—
Study level:	Third-cycle studies
Form and type of study:	Full-time studies
Lecture language:	Polski i Angielski
Profile of education:	Academic (A)
Semester:	0
Course homepage:	—
Responsible teacher:	prof. zw. dr hab. Cojuhari Petru (cojuhari@agh.edu.pl)

Module summary

Rozszerzenie kursu Analizy Funkcjonalnej. Elementy Teorii Operatorów.

Description of learning outcomes for module

MLO code	Student after module completion has the knowledge/ knows how to/is able to	Connections with FLO	Method of learning outcomes verification (form of completion)
Skills: he can			
M_U001	Student potrafi sformułować podstawowe problemy teorii rozproszenia używając matematycznego języka teorii operatorów.	SDA3A_U01, SDA3A_W02, SDA3A_W01, SDA3A_U02	Oral answer, Test, Essay, Examination, Activity during classes
M_U002	Student zna podstawowe własności przestrzeni Banacha i Hilberta oraz potrafi opisać główne przestrzenie funkcyjne ważne dla zwyczajnych i częściowych równań różniczkowych.	SDA3A_U01, SDA3A_W02, SDA3A_W01, SDA3A_U02	Oral answer, Test, Essay, Examination, Activity during classes
Knowledge: he knows and understands			
M_W001	Student zna podstawy teorii operatorów, rozumie ich znaczenie oraz zna ich zastosowania.	SDA3A_W02, SDA3A_W01	Oral answer, Test, Essay, Examination, Activity during classes
M_W002	Student posiada poszerzoną wiedzę ze współczesnej teorii spektralnej oraz potrafi omówić konkretne przykłady operatorów występujące w pokrewnych dziedzinach fizyki matematycznej, fizyki kwantowej, itp.	SDA3A_W02, SDA3A_W01	Oral answer, Test, Essay, Examination, Activity during classes

M_W003	Student rozumie znaczenie teorii perturbacji w analizie spektralnej operatorów.	SDA3A_W02, SDA3A_W01	Oral answer, Test, Essay, Examination, Activity during classes
M_W004	Student rozumie w jaki sposób metody analizy funkcjonalnej, a szczególnie teorii operatorów, mogą być użyte jako silne narzędzia w studiowaniu różnych problemów fizyki matematycznej mechaniki kwantowej oraz innych gałęzi nauk przyrodniczych.	SDA3A_U01, SDA3A_W02, SDA3A_W01	Oral answer, Test, Essay, Examination, Activity during classes

Number of hours for each form of classes

	Form of classes										
Suma	Lectures	Auditorium classes	Laboratory classes	Project classes	Conversation seminar	Seminar classes	Practical classes	Fieldwork classes	Workshops	Prace kontrolne i przejściowe	Lektorat
60	30	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0

FLO matrix in relation to forms of classes

MLO code	Student after module completion has the knowledge/ knows how to/is able to	Form of classes										
		Lectures	Auditorium classes	Laboratory classes	Project classes	Conversation seminar	Seminar classes	Practical classes	Fieldwork classes	Workshops	Prace kontrolne i przejściowe	Lektorat
Skills: he can												
M_U001	Student potrafi sformułować podstawowe problemy teorii rozproszenia używając matematycznego języka teorii operatorów.	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M_U002	Student zna podstawowe własności przestrzeni Banacha i Hilberta oraz potrafi opisać główne przestrzenie funkcyjne ważne dla zwyczajnych i częściowych równań różniczkowych.	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Knowledge: he knows and understands												
M_W001	Student zna podstawy teorii operatorów, rozumie ich znaczenie oraz zna ich zastosowania.	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-

M_W002	Student posiada poszerzoną wiedzę ze współczesnej teorii spektralnej oraz potrafi omówić konkretne przykłady operatorów występujące w pokrewnych dziedzinach fizyki matematycznej, fizyki kwantowej, itp.	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M_W003	Student rozumie znaczenie teorii perturbacji w analizie spektralnej operatorów.	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M_W004	Student rozumie w jaki sposób metody analizy funkcjonalnej, a szczególnie teorii operatorów, mogą być użyte jako silne narzędzia w studiowaniu różnych problemów fizyki matematycznej mechaniki kwantowej oraz innych gałęzi nauk przyrodniczych.	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Student workload (ECTS credits balance)

Student activity form	Student workload
Udział w zajęciach dydaktycznych/praktyka	60 h
Preparation for classes	26 h
przygotowanie projektu, prezentacji, pracy pisemnej, sprawozdania	30 h
Examination or Final test	2 h
Contact hours	2 h
Summary student workload	120 h
Module ECTS credits	6 ECTS

Additional information

Module content

Lectures

(PL)

1. Przestrzenie liniowe unormowane. Zupełność. Uzupełnienie przestrzeni unormowanych. Przestrzenie Banacha. Przestrzenie Hilberta. Przestrzenie funkcji ciągłych, przestrzenie Lebesgue'a, przestrzenie Sobolewa i inne.

2. Funkcjonały liniowe. Przestrzeń sprzężona/dualna. Przedłużanie liniowych funkcjonałów ograniczonych. Reprezentacje funkcjonałów w konkretnych przestrzeniach. Twierdzenie Riesza-Frecheta. Przestrzenie refleksywne. Słaba zbieżność.

3. Operatory liniowe w przestrzeniach Banacha. Ciągłość a ograniczoność. Przestrzeń

operatorów ograniczonych. Silna i słaba topologie. Operator sprzężony. Zasada jednostajnej ograniczoności.

4. Przykłady operatorów ograniczonych. Transformata Fouriera, twierdzenie Parsevala oraz nierówność Hausdorffa-Younga. Transformata Hilberta, transformata Laplace'a, transformata Hilberta-Hankela. Operatory rozwiązania równań hiperbolicznych. Operator rozwiązania równania ciepła. Operatory całkowe osobliwe, operatory pseudo-różniczkowe, operatory całkowe Fouriera.

5. Operatory zwarte. Podstawowe własności operatorów zwartych. Przestrzeń operatorów zwartych. Operatory skończenie wymiarowe. Ślad oraz wyznacznik operatorów w przestrzeniach Banacha. Klasy operatorów całkowe zwartych. Alternatywa Fredholma z zastosowaniami do równań całkowych.

6. Operatory domknięte. Operatory domykalne. Twierdzenie o wykresie domkniętym. Stabilność domkniętości operatorów przy względnie ograniczonych/zwartych zaburzeniach. Domkniętość pewnych klas operatorów różniczkowych.

7. Rezolwenta oraz widmo operatora liniowego. Funkcje operatorowe (rachunek funkcyjny). Twierdzenie o odwzorowaniu spektralnym. Rozdzielenie widma. Wartości własne izolowane. Widmo operatorów Sturma -Liouville'a (przypadek regularny).

8. Operatory symetryczne i samosprzężone. Indeksy defektu. Transformata Cayley'ego. Rozszerzenia operatorów symetrycznych. Wzory von Neumanna. Widmo i rezolwenta operatora samosprzężonego.
Operatory półograniczone oraz akretywne. Samosprzężne rozszerzenia metodą Friedrichsa (rozszerzenia sztywne). Zaburzenia operatorów samosprzężonych. Operatory różniczkowe cząstkowe. Operator Laplace'a w całej przestrzeni. Operator Laplace'a-Beltrami. Operator Maxwella. Operator Schrödingera z potencjałem statystycznym. Operator Diraca. Kryteria samosprzężoności operatorów Schrödingera i Diraca.

9. Rozkład spektralny. Twierdzenie spektralne dla operatorów samosprzężonych. Rozkład miary spektralnej na część absolutnie ciągłą oraz część singularną. Zaburzenie widma ciągłego.

10. Podstawowe zagadnienia teorii rozpraszania. Operatory falowe. Istnienie operatorów falowych. Operator rozproszenia. Zastosowanie do rozpraszania potencjału.

(EN)

1. Normed linear spaces. Completeness. Completion of a normed space. Banach spaces. Hilbert spaces. Spaces of continuous functions, Lebesque spaces, Sobolev spaces, etc..

2. Linear functionals. The adjoint / dual space. Extension of bounded linear functionals. Representation of functionals on concrete spaces. The Riesz-Frechet representation theorem. Reflexive spaces. Weak convergence.

3. Linear operators in Banach spaces. Continuity and boundedness. The space of bounded operators. Strong and weak topologies. The adjoint operator. Principle of

uniform boundedness.

4. Examples of bounded operators. The Fourier transform, Parseval’s theorem and Hausdorff-Young inequality. The Hilbert transform, the Laplace transform, the Hilbert-Hankel transform. Solution operators for hyperbolic equations. Solution operator for the heat equation. Singular integral operators, pseudodifferential operators and Fourier integral operators.

5. Compact operators. Basic properties of compact operators. The space of compact operators. Degenerate operators. The trace and determinant for operators in Banach spaces. Classes of compact integral operators. The Fredholm alternative with applications to integral equations.

6. Clossed operators. Closable operators.The closed graph theorem. Stability of closedness under relatively bounded / compact perturbation. Closedness of certain classes of differential operators.

7. Resolvent set and spectrum of an operator. Functions of an operator (functional calculus). Spectral mapping theorem. Separation of the spectrum. Isolated eigenvalues. The spectra of compact operators. Operators with compact resolvent. Perturbation of the spectrum. Spectra of Sturm-Liouville operators (regular case).

8. Symmetric and self-adjoint operators. Deficiency indices. Cayley transform. Extensions of symmetric operators. von Neumann formulae. The resolvents and spectra of self-adjoint operators. Semi-bounded and accretive operators. Friedrichs method of extension. Perturbation of self-adjoint operators. Partial differential operators. The Laplacian in the whole space. The Laplace-Beltrami operator. The Maxwell operator. The Schrödinger operator with a static potential. The Dirac operator. Self-adjointness criteria for Schrodinger and Dirac operators. Spectra of Schrödinger and Dirac type operators.

9. Spectral resolutions. Spectral theorem for self-adjoint operators. Decomposition of spectral measure into the absolutely continuous and the singular part. Perturbation of continuous spectra.

10. Basic concepts of scattering theory. Wave operators. Existence of the wave operators. The scattering operator. An application to potential scattering.

Auditorium classes

Zakłada się, że istota głównych pojęć, zasad i rezultatów przedstawionych na wykładach zostanie podkreślona poprzez prezentację i rozwiązywanie wybranych problemów oraz ćwiczeń na seminarium.
It is assumed to reveal the essence of the main notions, principles and results encountered in the lectures by presenting and solving specially selected problems and exercises.

Teaching methods and techniques:

Lectures: Wykład jest klasycznym wykładem tablicowym. Mile widziana aktywność studentów podczas wykładu – np. zadawanie pytań wykładowcy.
Auditorium classes: Podczas zajęć audytoryjnych studenci na tablicy rozwiązują zadane wcześniej problemy. Prowadzący na bieżąco dokonuje stosowanych wyjaśnień i moderuje dyskusję z grupą nad

danym problemem.

Warunki i sposób zaliczenia poszczególnych form zajęć, w tym zasady zaliczeń poprawkowych, a także warunki dopuszczenia do egzaminu:
-

Zasady udziału w poszczególnych zajęciach, ze wskazaniem, czy obecność studenta na zajęciach jest obowiązkowa:
Lectures:
– Attendance is mandatory: No
– Participation rules in classes: Studenci uczestniczą w zajęciach poznając kolejne treści nauczania zgodnie z syllabusem przedmiotu. Studenci winni na bieżąco zadawać pytania i wyjaśniać wątpliwości. Rejestracja audiowizualna wykładu wymaga zgody prowadzącego.
Auditorium classes:
– Attendance is mandatory: Yes
– Participation rules in classes: Doktoranci przystępując do ćwiczeń są zobowiązani do przygotowania się w zakresie wskazanym każdorazowo przez prowadzącego (np. w formie zestawów zadań). Ocena pracy doktoranci może bazować na wypowiedziach ustnych lub pisemnych w formie kolokwium, co zgodnie z regulaminem studiów AGH przekłada się na ocenę końcową z tej formy zajęć.

Method of calculating the final grade
Average evaluation from the examination and presentation.

Sposób i tryb wyrównywania zaległości powstałych wskutek nieobecności studenta na zajęciach:
-

Prerequisites and additional requirements
The student is assumed to have a basic knowledge of linear algebra and real and complex analysis.

Recommended literature and teaching resources
1. Y.A.Abramovich and C.D.Aliprants, Problems in Operator Theory, Graduate Studies in Mathematics, vol. 51, AMS, Providence, 2002.

2. Yu.M.Berezansky, Z.C.Sheftel, and G.F.Us, Functional analysis, vol. I an II, Birkhauser Verlag, Basel, 1996.

3. T.Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

4. P.D.Lax and R.S.Phillips, Scattering Theory, Academic Press, New York, 1989.

5. P.D.Lax, Functional analysis, Wiley-Interscience, 2002.

6. M.Reed and B.Simon, Methods of modern mathematical physics, vol. 1, Functional analysis, 1972; vol.2, Fourier analysis, self-adjointness, 1975; vol. 3, Scattering theory, 1979; vol. 4, Analysis of operators, 1978, Academic Press, New York.

7. M.Schechter, Operator methods in quantum mechanics, North Holland, New York, Oxford, 1989.

Scientific publications of module course instructors related to the topic of the module
1) Cojuhari, Petru; Gheondea, Aurelian; Triplets of closely embedded Hilbert spaces, Integral Equations Oper. Theory 81, No. 1, 1-33 (2015).

2) Cojuhari, P.A.; Grod, A.; Kuzhel, S; On the S-matrix of Schrödinger operators with non-symmetric zero-range potentials, J. Phys. A, Math. Theor. 47, No. 31, Article ID 315201, 23 p. (2014).

3) Cojuhari, P.A.; On the discrete spectrum of a linear operator pencil arizing in transport theory, Methods Funct. Anal. Topol. 20, No. 1, 10-16 (2014).

4) Cojuhari, Petru; Gheondea, Aurelian; Triplets of closely embedded Dirichlet type spaces on the unit polydisc, Complex Anal. Oper. Theory 7, No. 5, 1525-1544 (2013).

5) Cojuhari, Petru A.; Kuzhel, Sergii; Lax-Phillips scattering theory for □□-symmetric ρ-perturbed operators, J. Math. Phys. 53, No. 7, 073514, 17 p. (2012).

6) Cojuhari, Petru; Gheondea, Aurelian; Embeddings, operator ranges, and Dirac operators, Complex Anal. Oper. Theory 5, No. 3, 941-953 (2011).

7) Cojuhari, Petru; Gheondea, Aurelian; Closely embedded Kreĭn spaces and applications to Dirac operators, J. Math. Anal. Appl. 376, No. 2, 540-550 (2011).

8) Cojuhari, Petru; Gheondea, Aurelian; Closed embeddings of Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl. 369, No. 1, 60-75 (2010).

9) Cojuhari, Petru A.; Nowak, Michał A. ;Projection-iterative methods for a class of difference equations, Integral Equations Oper. Theory 64, No. 2, 155-175 (2009).

10) Cojuhari, Petru; Gheondea, Aurelian; Kreĭn spaces induced by symmetric operators. J. Oper. Theory 61, No. 2, 347-367 (2009).

11) Cojuhari, P.A. Discrete spectrum in the gaps for perturbations of periodic Jacobi matrices. J. Comput. Appl. Math. 225, No. 2, 374-386 (2009).

12) Cojuhari, Petru; Janas, Jan; Unbounded Jacobi matrices with empty absolutely continuous spectrum. Bull. Pol. Acad. Sci., Math. 56, No. 1, 39-51 (2008).

13) Cojuhari, P.A.; Gomilko, A.M.; On the characterization of scalar type spectral operators. Stud. Math. 184, No. 2, 121-132 (2008).

14) Cojuhari, P.A. On the spectrum of a class of block Jacobi matrices. Bakonyi, Mihály (ed.) et al., Operator theory, structured matrices, and dilations. Tiberiu Constantinescu memorial volume. Bucharest: Theta (ISBN 978-973-87899-0-6). Theta Series in Advanced Mathematics 7, 137-152 (2007).

15) Cojuhari, Petru A.; Janas, Jan; Discreteness of the spectrum for some unbounded Jacobi matrices; Acta Sci. Math. 73, No. 3-4, 649-667 (2007).

16) Cojuhari, Petru A. Finiteness of eigenvalues of the perturbed Dirac operator; Janas, Jan (ed.) et al., Operator theory, analysis and mathematical physics. Mainly the lectures of the international conference on operator theory and its applications in mathematical physics, OTAMP 2004, Bedlewo, Poland, July 6–11, 2004. Basel: Birkhäuser (ISBN 978-3-7643-8134-9/hbk; 978-3-7643-8135-6/e-book). Operator Theory: Advances and Applications 174, 1-7 (2007).

17) Cojuhari, P.A. Estimates of the discrete spectrum of a linear operator pencil; J. Math. Anal. Appl. 326, No. 2, 1394-1409 (2007).

Additional information

-