



|                     |  |                |  |
|---------------------|--|----------------|--|
| Nazwa modułu zajęć: | Analiza Funkcjonalna                       |                |  |
| Rok akademicki:     | 2019/2020                                  | Kod:           | AMAT-2-401-MN-s Punkty ECTS: 4                     |
| Wydział:            | Matematyki Stosowanej                      |                |  |
| Kierunek:           | Matematyka                                 | Specjalność:   | Matematyka w naukach technicznych i przyrodniczych |
| Poziom studiów:     | Studia II stopnia                          | Forma studiów: | Stacjonarne  |
| Język wykładowy:    | Polski                                     | Profil:        | Ogólnoakademicki (A) Semestr: 4                    |
| Strona www:         | —  |                |  |
| Prowadzący moduł:   | dr hab. Rudol Krzysztof (rudol@agh.edu.pl) |                |  |

### Treści programowe zapewniające uzyskanie efektów uczenia się dla modułu zajęć

Podstawowy kurs analizy funkcjonalnej.

### Opis efektów uczenia się dla modułu zajęć

| Kod MEU               | Student, który zaliczył moduł zajęć zna i rozumie/potrafi/jest gotów do  | Powiązania z KEU                      | Sposób weryfikacji i oceny efektów uczenia się osiągniętych przez studenta w ramach poszczególnych form zajęć i dla całego modułu zajęć |
|-----------------------|--|---------------------------------------|---|
| Wiedza: zna i rozumie |  |                                       |   |
| M_W001                | Ma pogłębioną wiedzę w wybranej dziedzinie matematyki teoretycznej lub stosowanej  | MAT2A_W03,<br>MAT2A_U01,<br>MAT2A_W01 | Egzamin   |
| M_W002                | zna powiązania zagadnień wybranej dziedziny z innymi działami matematyki teoretycznej i stosowanej   | MAT2A_U04,<br>MAT2A_W07               | Aktywność na zajęciach  |
| Umiejętności: potrafi |  |                                       |   |
| M_U001                | posługuje się językiem oraz metodami analizy funkcjonalnej w zagadnieniach analizy matematycznej i jej zastosowaniach, w szczególności wykorzystuje własności klasycznych przestrzeni Banacha i Hilberta | MAT2A_K02,<br>MAT2A_U09               | Egzamin   |

|        |   |                         |         |
|--------|---|-------------------------|---------|
| M_U002 | umie, na poziomie zaawansowanym i obejmującym matematykę współczesną, stosować oraz przedstawiać w mowie i na piśmie, metody co najmniej jednej wybranej gałęzi matematyki: analizy matematycznej i analizy funkcjonalnej, teorii równań różniczkowych... | MAT2A_U13,<br>MAT2A_K06 | Egzamin |
|--------|---|-------------------------|---------|

### Liczba godzin zajęć w ramach poszczególnych form zajęć

| Suma | Forma zajęć dydaktycznych |                       |                         |                      |                |                     |                    |                  |                     |                               |          |
|------|---------------------------|-----------------------|-------------------------|----------------------|----------------|---------------------|--------------------|------------------|---------------------|-------------------------------|----------|
|      | Wykład                    | Ćwiczenia audytoryjne | Ćwiczenia laboratoryjne | Ćwiczenia projektowe | Konwersatorium | Zajęcia seminaryjne | Zajęcia praktyczne | Zajęcia terenowe | Zajęcia warsztatowe | Prace kontrolne i przejściowe | Lektorat |
| 30   | 30                        | 0                     | 0                       | 0                    | 0              | 0                   | 0                  | 0                | 0                   | 0                             | 0        |

### Matryca kierunkowych efektów uczenia się w odniesieniu do form zajęć i sposobu zaliczenia, które pozwalają na ich uzyskanie

| Kod MEU               | Student, który zaliczył moduł zajęć zna i rozumie/potrafi/jest gotów do  | Forma zajęć dydaktycznych |                       |                         |                      |                |                     |                    |                  |                     |                               |          |
|-----------------------|--|---------------------------|-----------------------|-------------------------|----------------------|----------------|---------------------|--------------------|------------------|---------------------|-------------------------------|----------|
|                       |  | Wykład                    | Ćwiczenia audytoryjne | Ćwiczenia laboratoryjne | Ćwiczenia projektowe | Konwersatorium | Zajęcia seminaryjne | Zajęcia praktyczne | Zajęcia terenowe | Zajęcia warsztatowe | Prace kontrolne i przejściowe | Lektorat |
| Wiedza: zna i rozumie |  |                           |                       |                         |                      |                |                     |                    |                  |                     |                               |          |
| M_W001                | Ma pogłębioną wiedzę w wybranej dziedzinie matematyki teoretycznej lub stosowanej  | +                         | -                     | -                       | -                    | -              | -                   | -                  | -                | -                   | -                             | -        |
| M_W002                | zna powiązania zagadnień wybranej dziedziny z innymi działami matematyki teoretycznej i stosowanej   | +                         | -                     | -                       | -                    | -              | -                   | -                  | -                | -                   | -                             | -        |
| Umiejętności: potrafi |  |                           |                       |                         |                      |                |                     |                    |                  |                     |                               |          |
| M_U001                | posługuje się językiem oraz metodami analizy funkcjonalnej w zagadnieniach analizy matematycznej i jej zastosowaniach, w szczególności wykorzystuje własności klasycznych przestrzeni Banacha i Hilberta | +                         | -                     | -                       | -                    | -              | -                   | -                  | -                | -                   | -                             | -        |

|        |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M_U002 | umie, na poziomie zaawansowanym i obejmującym matematykę współczesną, stosować oraz przedstawiać w mowie i na piśmie, metody co najmniej jednej wybranej gałęzi matematyki: analizy matematycznej i analizy funkcjonalnej, teorii równań różniczkowych... | + | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

## Nakład pracy studenta (bilans punktów ECTS)

| Forma aktywności studenta                 | Obciążenie studenta |
|---|---------------------|
| Udział w zajęciach dydaktycznych/praktyka | 30 godz             |
| Samodzielne studiowanie tematyki zajęć    | 63 godz             |
| Egzamin lub kolokwium zaliczeniowe        | 2 godz              |
| Dodatkowe godziny kontaktowe              | 5 godz              |
| Sumaryczne obciążenie pracą studenta      | 100 godz            |
| Punkty ECTS za moduł                      | 4 ECTS              |

## Pozostałe informacje

### Szczegółowe treści kształcenia w ramach poszczególnych form zajęć (szczegółowy program wykładów i pozostałych zajęć)

#### Wykład

##### Przykłady przestrzeni unormowanych

Przestrzeń euklidesowa, przestrzenie ciągów:  $c$ ,  $c_0$ ,  $m$ ,  $L_p$ , przestrzenie funkcji ciągłych, całkownych, przestrzenie Lebesgue'a ( $L_p$ ), przestrzenie Sobolewa.

##### Topologia przestrzeni unormowanej

Zbieżność w konkretnych przestrzeniach. Zbiory gęste. Ośrodkowość.

##### Przestrzenie Banacha

Podstawowe operacje na przestrzeniach Banacha: przestrzenie ilorazowe, sumy proste. Podprzestrzenie.

##### Ciągły funkcjonal liniowe, ich przedłużenie

Twierdzenie Hahna-Banacha, najważniejsze wnioski.

##### Przestrzenie sprzężone

Przykłady. Przestrzenie refleksywne. Topologie: słaba i  $\bullet$ -słaba.

##### Operatory liniowe w przestrzeniach unormowanych

Ograniczoność a ciągłość. Przestrzeń operatorów ograniczonych w przestrzeniach Banacha. Operator sprzężony.

##### Zbieżność ciągów operatorów

Rodzaje zbieżności ciągów operatorów jednostajna, silna oraz słaba. Twierdzenie Banacha-Steinhaus.

Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym

Twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym oraz o wykresie domkniętym, o odwzorowaniu odwrotnym.

Widmo i rezolwenta operatora liniowego

Rezolwenta operatora liniowego. Widmo operatora. Klasyfikacja widma. Przykłady.

Operatory zwarte

Podstawowe własności. Widmo operatora zwartego.

Przestrzeń Hilberta

Przykłady przestrzeni Hilberta. Ortogonalność. Rzut na podprzestrzeń.

Układy ortonormalne

Szeregi Fouriera. Nierówność Bessla. Baza przestrzeni Hilberta. Tożsamość Parsewala. Zagadnienie najlepszej aproksymacji. Twierdzenie Riesz-Fischer.

Operatory liniowe w przestrzeni Hilberta

Formy dwuliniowe a operatory. Operatory samosprężone. Twierdzenie o widmie operatora samosprężonego. Operatory unitarne.

Operatory dodatnie

Pierwiastek kwadratowy z operatora dodatniego. Rozkład spektralny operatora samosprężonego. Twierdzenie spektralne dla operatorów samosprężonych (bez dowodu).

Operatory gęsto określone

Operator domknięty i domykalny, rdzeń operatora, przykłady, związek z mechaniką kwantową. Różnica pomiędzy pojęciami: symetrii i samosprężoności. Ogólne twierdzenie spektralne (bez dowodu).

**Metody i techniki kształcenia:**

Wykład: Wykład jest klasycznym wykładem tablicowym. Mile widziana aktywność studentów podczas wykładu – np. zadawanie pytań wykładowcy.

**Warunki i sposób zaliczenia poszczególnych form zajęć, w tym zasady zaliczeń poprawkowych, a także warunki dopuszczenia do egzaminu:**

-

**Zasady udziału w poszczególnych zajęciach, ze wskazaniem, czy obecność studenta na zajęciach jest obowiązkowa:**

Wykład:

- Obecność obowiązkowa: Tak

- Zasady udziału w zajęciach: Studenci uczestniczą w zajęciach poznając kolejne treści nauczania zgodnie z sylabusem przedmiotu. Studenci winni na bieżąco zadawać pytania i wyjaśniać wątpliwości. Rejestracja audiowizualna wykładu wymaga zgody prowadzącego.

**Sposób obliczania oceny końcowej**

1. Ocenę końcową **OK** wyznacza się na podstawie oceny uzyskanej podczas egzaminu. Średniej ważonej **SW** obliczonej według wzoru

**OK = OE,**

gdzie **OE** jest oceną uzyskaną z egzaminu.

2. Ocena końcowa **OK** jest obliczana według algorytmu:

Jeżeli **SW**  $\geq$  4.75, to **OK** = 5.0 (bdb),

jeżeli  $4.75 > \mathbf{OE} \geq 4.25$ , to **OK** = 4.5 (db),

jeżeli  $4.25 > \mathbf{SE} \geq 3.75$ , to **OK** = 4.0 (db),

jeżeli  $3.75 > \mathbf{SE} \geq 3.25$ , to **OK** = 3.5 (dst),

jeżeli  $3.25 > \mathbf{SE} \geq 3.00$ , to **OK** = 3.0 (dst).

### **Sposób i tryb wyrównywania zaległości powstałych wskutek nieobecności studenta na zajęciach:**

Student powinien zgłosić się do prowadzącego w celu ustalenia indywidualnego sposobu nadrobienia zaległości.

### **Wymagania wstępne i dodatkowe, z uwzględnieniem sekwencyjności modułów**

Kurs analizy matematycznej obejmujący teorię miary i całki Lebesgue'a. Elementy algebry liniowej i topologii ogólnej.

### **Zalecana literatura i pomoce naukowe**

1. A. Alexiewicz, *Analiza funkcjonalna*, Warszawa, PWN, 1969.
2. S. G. Krein (red.), *Analiza funkcjonalna*, Warszawa, PWN, 1967.
3. L. A. Lusternik, W. I. Sobolew, *Elementy analizy funkcjonalnej*, Warszawa, PWN, 1999.
4. J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, Warszawa, PWN, 1989.
5. W. Rudin, *Analiza funkcjonalna*, Warszawa, PWN, 2002.
6. S. Prus, A. Stachura, *Analiza funkcjonalna w zadaniach*, Warszawa, PWN, 2007.
7. K. Rudol, *Zbiór zadań z analizy funkcjonalnej, Cz.I*, UWND AGH, Kraków 2008.
8. K. Rudol, M. Malejki, *Analiza funkcjonalna: Kurs podstawowy*, Wydawnictwa AGH.

### **Publikacje naukowe osób prowadzących zajęcia związane z tematyką modułu**

- (W.Mikołajczyk, K.Rudol) Matrices of operators on some function spaces, Current Trends in Analysis and Its Applications, Proc. of the 9th ISAAC Congress, Kraków 2013, V.V. Mityushev, M.V. Ruzhansky, Eds., Birkhauser, (2015), 689-694.
- (K. Rudol) Matrices related to some Fock space operators, Opuscula Math. 31, (2011), 289-296.
- (M.Kosiek, K.Rudol) Dual algebras and A-measures, Journal of function spaces, 01/2014; 1-8.
- (K. Rudol) Corona theorem and isometries, Opuscula Math. 24 (2004),123-131.
- (K. Rudol) Spectra of subnormal pairs, Opuscula Math. 27, (2007), 301-304.
- (Z.Ambroziński, K.Rudol) Matrices defined by frames,Opuscula Math. 29 (2009), 365-375.
- K. Rudol, Zbiór zadań z analizy funkcjonalnej, Cz.I, UWND AGH, Kraków 2008.

### **Informacje dodatkowe**

Brak